SESSION DE 1976

CONCOURS A

MATHÉMATIQUES

Première épreuve

DURÉE : 4 heures. — COEFFICIENT : 4

Matériel autorisé : règle à calcul; tables numériques usuelles.

Les cinq exercices proposés sont indépendants.

Les candidats sont priés de séparer nettement les différents exercices, et d'encadrer les résultats demandés.

Il sera tenu compte de la simplicité des solutions, de la clarté de la rédaction, et de la présentation.

I

On considère l'équation différentielle (E) du second ordre :

$$y''(x) + 4y'(x) + 5y(x) = 28 \cos x + 4 \sin x$$

1° Déterminer la solution générale de l'équation (E).

2° On désigne par u la solution périodique de l'équation (E), et par M la valeur maximum de la fonction u. Déterminer le nombre M.

3° On désigne par v la solution particulière de l'équation (E) satisfaisant aux conditions initiales suivantes : $v(o) = 10$, $v'(o) = 0$.

Déterminer la fonction v.

4° Déterminer, en justifiant ce choix, un nombre X tel que, pour tout x supérieur ou égal à X, l'inégalité suivante soit vérifiée :

$$| v(x) - u(x) | \leqslant M \cdot 10^{-2}$$

II

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $Oxyz$. On désigne par a une constante non nulle positive.

On donne la parabole ($\mathcal{C}$) définie par la représentation paramétrique ($x = 0$, $y = u$, $2az = u^2$), et le point fixe A (a, o, o).

1° *a.* Écrire l'équation de la tangente au point courant M de la parabole ($\mathcal{C}$).

b. On désigne par T le point d'intersection de cette tangente et du plan d'équation $z = 0$.

Écrire l'équation du plan ($\mathcal{P}$) contenant Oz, et perpendiculaire à la droite AT.

2° On désigne par P le point d'intersection de la droite AM et du plan ($\mathcal{P}$).

a. Exprimer, à l'aide de u, les coordonnées X, Y, Z du point P.

b. Montrer que la distance du point P à l'origine O s'exprime uniquement à l'aide de Z.

3° On désigne par ($\mathcal{L}$) la courbe décrite par le point P lorsque le point M décrit la parabole ($\mathcal{C}$).

Préciser la nature géométrique de ($\mathcal{L}$); déterminer l'équation de sa projection orthogonale sur le plan d'équation $z = 0$.

III

On désigne par f la fonction des deux variables réelles x et y, définie par la condition :

$$f(x, y) = y^3 - x \cdot y - e^x$$

1° On considère la relation :

$$f(x, y) = 0.$$

a. Montrer que cette relation définit, au voisinage du point A ($x = 0$, $y = 1$), la variable y comme fonction implicite de la variable x.

b. Montrer que cette fonction admet, au voisinage de zéro, un développement limité à l'ordre deux. Déterminer ce développement.

2° On considère l'équation (E) :

$$f(x, y) = 0,$$

où la variable y est l'inconnue, et où la variable x est un paramètre positif ou nul.

a. Montrer que, pour tout x ($x \geqslant 0$), cette équation possède une racine réelle unique, notée $u(x)$. Montrer que les parties réelles des racines complexes sont négatives.

b. Étudier le sens de variation de la fonction u.

c. Montrer que la fonction u tend vers l'infini lorsque la variable x tend vers l'infini.

IV

Le plan est rapporté à un repère orthonormé Oxy. A tout point M de ce plan admettant pour coordonnées (x, y), on associe le polynôme f, fonction de la variable réelle t, défini par la relation :

$$f(t) = x \cdot t^2 + y \cdot t$$

On désigne par F (x, y) la borne supérieure de la fonction f sur le segment $[-1, +1]$, $(-1 \leqslant t \leqslant +1)$.

1° Calculer F (2, 1), et F (− 2, 1).

2° Déterminer, suivant la position du point M dans le plan, l'expression de F (x, y).

3° On considère l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points dont les coordonnées satisfont à la relation : F $(x, y) = 2$.

Représenter graphiquement, avec soin, l'ensemble $(\mathcal{E})$.

4° Étudier, suivant la position du point M, la continuité de la fonction F.

V

On considère la suite numérique réelle (u_n) définie par la donnée du terme u_0 ($u_0 = 0$), et de la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{1}{5} \cdot (u_n^3 - 1), \qquad n \in \mathbf{N}.$$

1° Établir, pour tout n, les inégalités suivantes : $-1 < u_n \leqslant 0$.

2° On considère l'équation :

$$x^3 - 5x - 1 = 0.$$

Cette équation admet trois racines désignées par a, b, c ($a < b < c$). On ne cherchera pas à calculer ces racines; on précisera pour chaque racine un encadrement à une unité près.

3° Déterminer un nombre k positif et inférieur à 1 ($0 < k < 1$) tel que, pour tout n, on ait l'inégalité : $u_{n+1} - b < k \cdot (u_n - b)$.

En déduire un nombre entier positif N tel que, pour tout n supérieur à N, on ait l'inégalité : $u_n - b < 10^{-2}$.

4° Quelle est la nature de la suite (u_n)?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail